Innovamat

Las operaciones básicas

Todo lo que no ves
de la suma, la resta,
la multiplicación
y la división

Prólogo

Sabemos que las matemáticas no son solo operaciones, pero **¿qué es más importante para el aprendizaje de esta parte fundamental de las matemáticas?** ¿Entender qué estamos haciendo, hacerlo deprisa o hacerlo bien?

En realidad, la respuesta no es excluyente: **los tres objetivos son indispensables**. **Comprender** es fundamental para cualquier aprendizaje. Pero también es importante **llegar al resultado correcto** y, con práctica, **ganar agilidad** en los cálculos; un aspecto fundamental para desarrollar la **fluidez aritmética**.

Este equilibrio se trabaja mediante la **construcción de conocimientos** a través de la conversación y el descubrimiento guiado, y a través de la **práctica** que nos permite ganar fluidez en el dominio de las operaciones.

Dentro de este contexto, el **papel del maestro como guía es indispensable**. Por un lado, ayuda a **descubrir** las estrategias de forma **clara y transparente**; y, por otro, se asegura de que los alumnos **siguen consolidando los contenidos**, animándolos a salir de su zona de confort.

¿Qué entendemos por fluidez?

La fluidez es la habilidad de trabajar con números, operaciones y procedimientos más complejos con agilidad.

No solo se trata de resolver las operaciones rápidamente, sino también de ser **eficientes y flexibles** al elegir la forma más adecuada para resolver una operación, según el contexto y los números implicados.

Por este motivo, en el aula fomentamos la construcción de un **amplio abanico de estrategias** que asegure el desarrollo de este razonamiento y flexibilidad. Cada una de las estrategias siguen una **secuencia de aprendizaje** basada en el **modelo CRA (concreto, representativo, abstracto)** para asegurar su dominio y comprensión. Esto significa:

1. Partimos de la manipulación con distintos materiales (concreto).

2. Representamos en papel lo que hacíamos manipulativamente (representativo).

3. Pasamos a las representaciones abstractas, como los algoritmos (abstracto).

El aprendizaje significativo de las operaciones básicas

Las matemáticas (sobre todo la parte de numeración) son una ciencia jerárquica: es necesario pisar un contenido para poder avanzar hacia el siguiente. **Las operaciones básicas** (suma, resta, multiplicación, división) **son fundamentales** en este proceso, porque allanan el terreno para sembrar otros conceptos más avanzados del álgebra y el cálculo.

Más allá de los algoritmos, dominar cada operación básica implica entender su significado, saber cómo se resuelve y qué estrategias podemos utilizar para conseguirlo.

Cada operación es como un iceberg: **lo que vemos en la superficie es solo una pequeña parte de toda su complejidad**. Todo lo que se mantiene bajo el agua es lo que da soporte y sentido en el dominio de cada operación.

Así pues, hemos ideado este recurso. Un librito que resume de forma visual todo lo que esconde el aprendizaje de cada operación básica:

· Qué significa sumar, restar, multiplicar y dividir.

· Qué acciones se proponen para resolver cada operación.

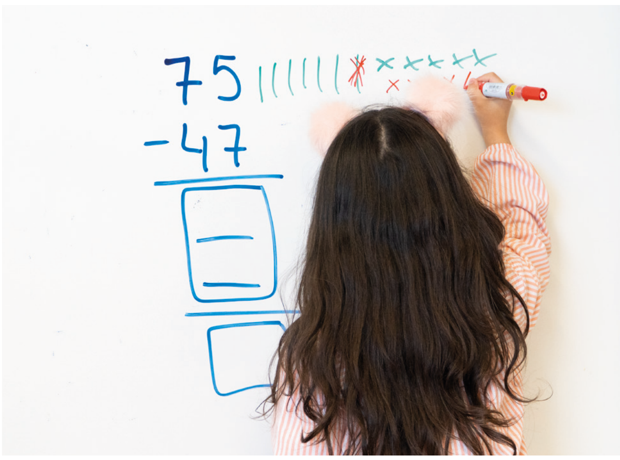
· Qué secuencia de aprendizaje, basada en el modelo CRA, sigue cada estrategia.

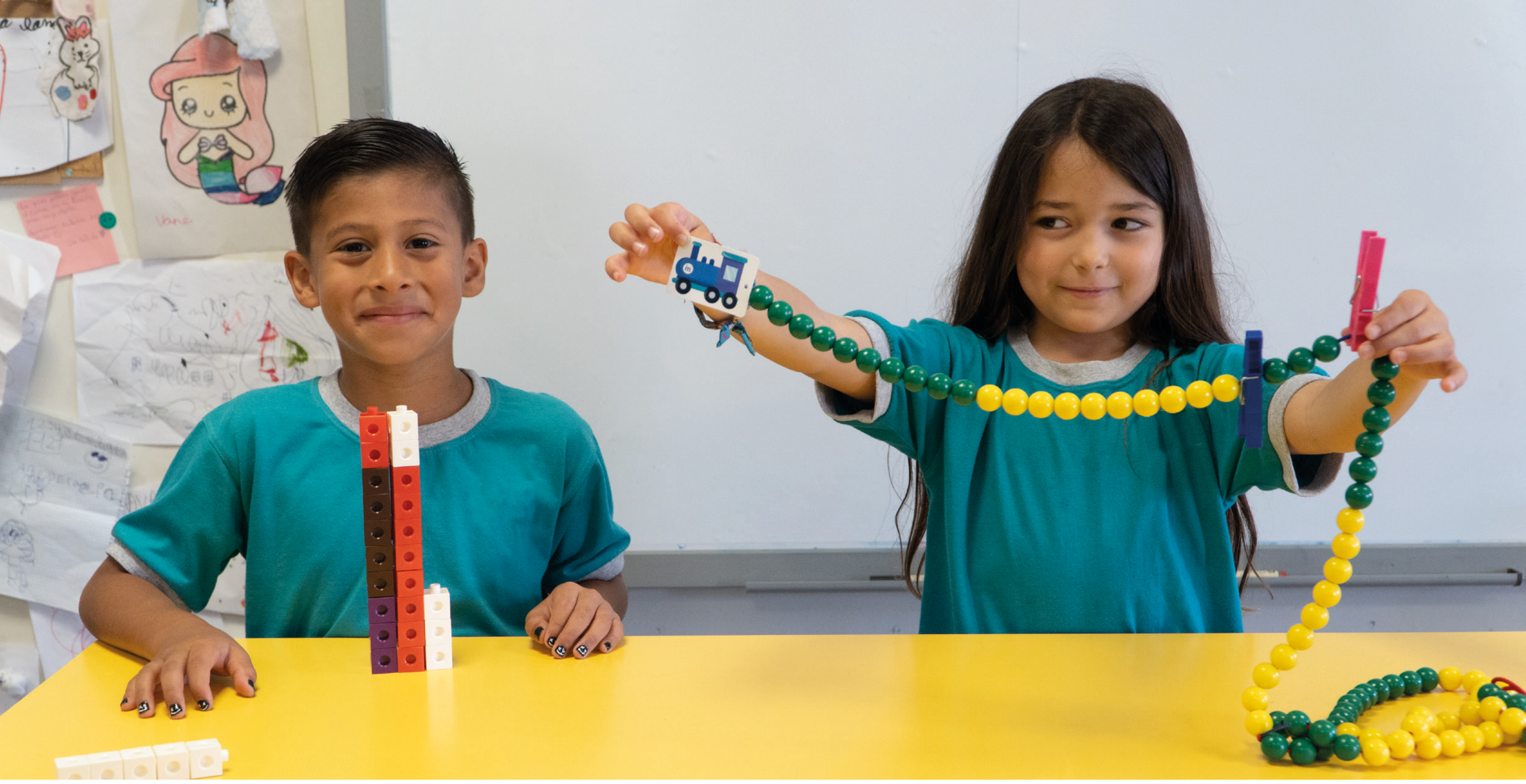
Tener este conocimiento nos permitirá ser más **flexibles y eficientes**. Sin embargo, practicar será esencial para ganar rapidez en los cálculos, un aspecto que trabajaremos más adelante.

Por el momento, te invitamos a sumergirte en este recurso para convertir el aprendizaje de cada operación en una oportunidad para pensar, entender y progresar.

¡Adelante!

Escanéame para saber más





Referencias bibliográficas

Bruner, J. S. (1966). Toward a Theory of Instruction. Cambridge: Harvard University Press.

Carpenter, T. P., *et al*. (1999). *Las matemáticas que hacen los niños: la enseñanza de las matemáticas desde un enfoque cognitivo*. Traducción de Castro Hernández, C., y Alonso, M. L.

Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G., y Chinn, C. A. (2007). Scaffolding achievement in problem-based and inquiry learning: A response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist*, 42, 99-107. https://doi.org/10.1080/00461520701263368

Tall, D. (1993) Success and failure in mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching*, (Vol. 14, pp. 6-10). ISSN 0025-5785.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). *Children learn mathematics: Learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school. Dutch design in mathematics education*, V: 1. Utrecht: Freudenthal Institute, Sense Publishers.

Suma y resta

Calvo, C., y Barba, D. (2005). 3×6.mat, Cuadernos de estrategias de cálculo. Barcelona.

Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. Mathematics in School, 8(3), 2-5.

Purpura, D. J., Baroody, A. J., Eiland, M. D., y Reid, E. (2016). Fostering first graders' reasoning strategies with basic sums: The value of guided instruction. Elementary School Journal, 117(1), 72–100. https://doi.org/10.1086/687809

Schneider, M., Merz, S., Stricker, J., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., y Luwel, K. (2018). Associations of number line estimation with mathematical competence: A meta-analysis. Child Development, 89, 1467-1484. https://doi.org/10.1111/cdev.13068

Torbeyns, J., Verschaffel, L., y Ghesquière, P. (2001). Investigating young children's strategy use and task performance in the domain of simple addition, using the "choice/no choice" method. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 273-278).

Multiplicación

Bay-Williams, J., y Kling, G. (2019). Math fact fluency: 60+ Games Assessment Tools to Support Learning and Retention. ASCD.

Bay-Williams, J. M., y SanGiovanni, J. J. (2021). Figuring out fluency: Mathematics teaching and learning, grades K-8: Moving beyond basic facts and memorization (1ª ed.). Corwin.

Calvo, C., y Barba, D. (2005). 3×6.mat, Cuadernos de estrategias de cálculo. Barcelona.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2002), Realistic mathematics education as work in progress, en: FOU-LAI LIN (eds.), Common Sense in Mathematics Education.

División

Calvo, C., y Barba, D. (2005). 3×6.mat, Cuadernos de estrategias de cálculo. Barcelona.

Ifrah, G. (1998). Historia universal de las cifras: la inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo (pp. 437, 1311). Madrid: Espasa, D. L.

Sarramona, J. y Pintó, C. (2000). Identificació de les competències bàsiques en l'ensenyament obligatori. Barcelona: Consejo Superior de Evaluación del Sistema Educativo del Departamento de Educación de la Generalitat de Cataluña.

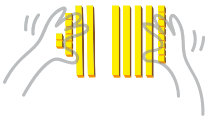
Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2002), Realistic mathematics education as work in progress, en: FOU-LAI LIN (eds.), Common sense in Mathematics.

La
suma

$48+28=$

COMPRENDER CONCEPTUALMENTE QUÉ ES LA SUMA

Unir



Añadir

+28

48 76

Relación suma-resta

$76-28=48$ $76-48=28$

$\boxed{76}$

$\boxed{28}$ $\boxed{48}$

$48+28=76$ $28+48=76$

SABER HACER LA OPERACIÓN FLUIDAMENTE

CÁLCULO EXACTO

Automatización de
sumas de un solo dígito

1+1	1+2	1+3	1+4	...
2+1	2+2	2+3	2+4	...
3+1	3+2	3+3	3+4	...
4+1	4+2	4+3	4+4	...
...	...	...	...	...

Estrategia de saltos

+20 +2 +6

48 68 70 76

48
+28
60
16
76

xxxxx xxx
xxxxx xxx

Estrategia de
descomposición

Búsqueda de equivalencias
(Hechos conocidos -
hechos derivados)

$48+28=?$

+2 +2 +4

$50+30=80$

-2 -2 -4

$48+28=76$

...

CÁLCULO ESTIMATIVO

Estimaciones

$48+28 \simeq 50+30$

$48+28 \simeq 80$

$45+25 < 48+28 < 50+30$

$70 < 48+28 < 80$

¿Qué es la suma?

La suma es la primera operación básica que se aprende en primaria. Se trata de una operación muy presente en nuestro día a día y que aparece en muchas situaciones cotidianas. Antes de empezar a resolver sumas, es importante **comprender qué significa sumar**. Por eso, los docentes proponemos diferentes situaciones y contextos en el aula que permiten llegar a su significado.

Algunas situaciones se centran en encontrar el resultado de **añadir elementos a una cantidad inicial**; y otros a encontrar el resultado de **unir varios grupos de elementos**.

¿Cómo resolvemos la suma?

Dominar la suma va más allá de aplicar un algoritmo. Aunque al algoritmo también llegarán, en el aula se construyen **diferentes estrategias** que permiten ganar criterio y flexibilidad en las operaciones.

Estas estrategias son:

- **Saltos sobre la línea numérica**.

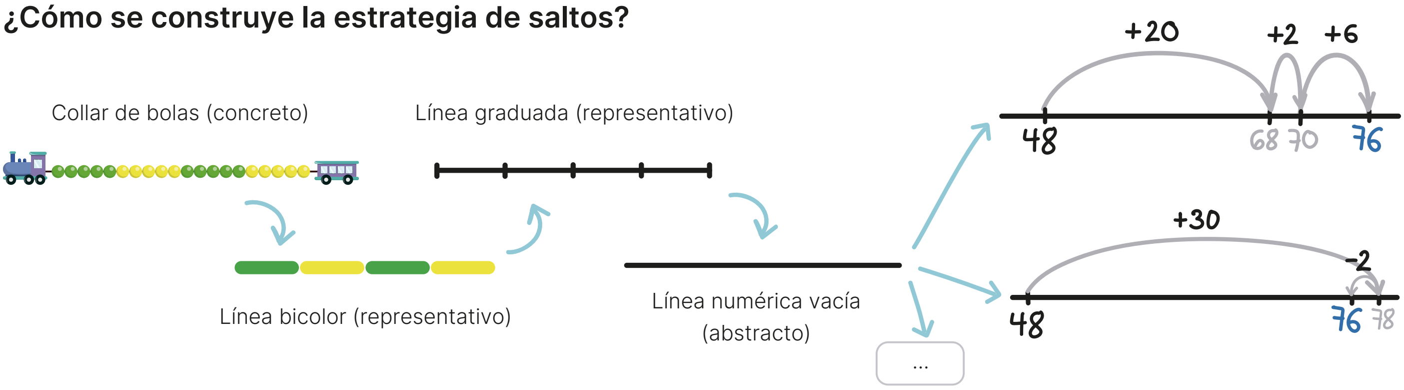
- **Estrategia de descomposición**.

Automatización de sumas de un dígito

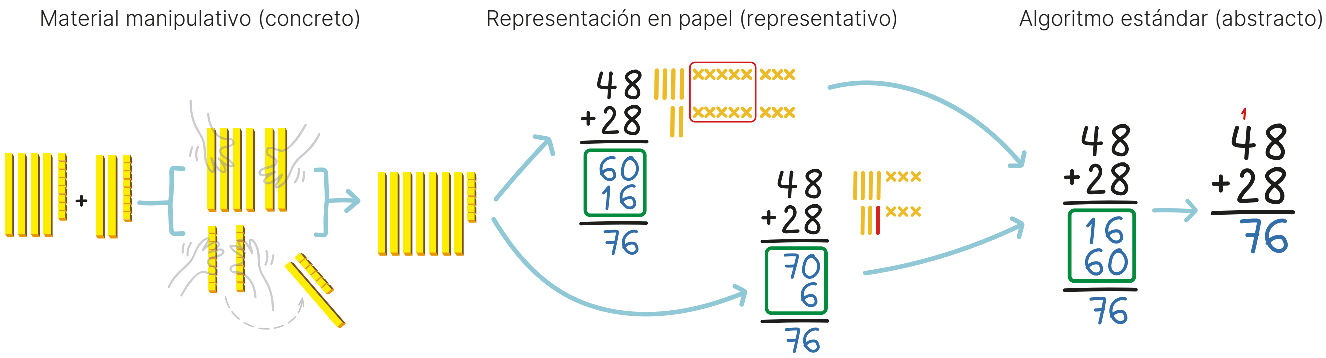
Para poder dominar la resolución de sumas más complejas, **es muy práctico automatizar las sumas de un dígito**. Es decir, saber evocar sus resultados en un tiempo razonable. Esto permite que nos liberemos del esfuerzo de realizar cálculos fáciles y nos centremos en conceptos más avanzados.

1+1	1+2	1+3	1+4	...
2+1	2+2	2+3	2+4	...
3+1	3+2	3+3	3+4	...
4+1	4+2	4+3	4+4	...
...	...	...	...	...

¿Cómo se construye la estrategia de saltos?



¿Cómo se construye la estrategia de descomposición?



Qué nos permite la estrategia de saltos:

· Potenciar el cálculo mental de sumas.
· Resolver sumas de forma muy eficiente.
· Dejar atrás el conteo con los dedos.

Qué nos permite la estrategia de descomposición:

· Potenciar el cálculo escrito de sumas.
· Comprender la posición y el valor de los números.
· Llegar al algoritmo estándar de la suma de forma transparente.

Cronología de aprendizaje de la suma de un alumno

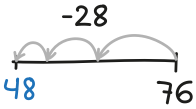
Pese a que puede haber variaciones de un alumno a otro, a lo largo de 1º de primaria se trabaja la estrategia de saltos con el objetivo de llegar a la línea numérica vacía a final de curso. La estrategia de descomposición se trabaja en 2º de primaria, con el objetivo de empezar a dominar el algoritmo estándar de la suma a final de curso. A medida que se amplía el rango numérico (como de 0 a 10 o de 20 a 50), se recupera el material manipulativo con el objetivo de realizar otro ciclo de abstracción e ir abandonándolo progresivamente.

La
resta

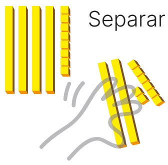
76 - 28 =

COMPRENDER CONCEPTUALMENTE QUÉ ES LA RESTA

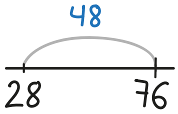
Quitar



Separar



Distancia



Relación suma-resta

76-28=48

76-48=28

$\boxed{76}$
$\boxed{28}\ \boxed{48}$

48+28=76

28+48=76

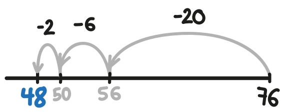
SABER HACER LA OPERACIÓN FLUIDAMENTE

CÁLCULO EXACTO

Automatización de restas de un solo dígito

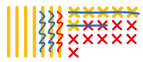
1-1	1-2	1-3	1-4	...
2-1	2-2	2-3	2-4	...
3-1	3-2	3-3	3-4	...
4-1	4-2	4-3	4-4	...
...	...	...	...	...

Estrategia de saltos



Estrategia de descomposición

$\overset{6}{\cancel{7}}\overset{16}{\cancel{6}}$
-28
$\boxed{\begin{matrix}40\\8\end{matrix}}$
48



Búsqueda de equivalencias
(Hechos conocidos - hechos derivados)

$76-28=?$
$\downarrow{+2} \quad \downarrow{+2}$
$78-30=48$

$76-28=?$
$\downarrow{+2} \quad \downarrow{+2}$
$78-28=50$
$\downarrow{-2} \quad \downarrow{-2}$
$76-28=48$

...

CÁLCULO ESTIMATIVO

Estimaciones

$76-28 \simeq 75-30$
$\downarrow \quad \downarrow$
$76-28 \simeq 45$

70-30 < 76-28 < 80-20
40 < 76-28 < 60

¿Qué es la resta?

Generalmente, la resta está vista como la operación opuesta a la suma. Es decir, **sacar elementos de una cantidad inicial**.

Pero restar también es **separar elementos de un grupo**, y **encontrar la distancia** entre dos números. Algo que responde, por ejemplo, a la pregunta «¿qué longitud tiene el salto entre el 28 y el 76?».

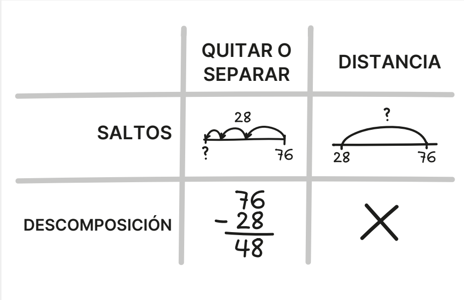
¿Cómo resolvemos una resta?

Existen **distintas estrategias** para resolver restas. Para desarrollar criterio y **flexibilidad** en los cálculos, es necesario conocer y dominar cada una de ellas.

Las dos estrategias principales que nos ayudan a resolver restas son:

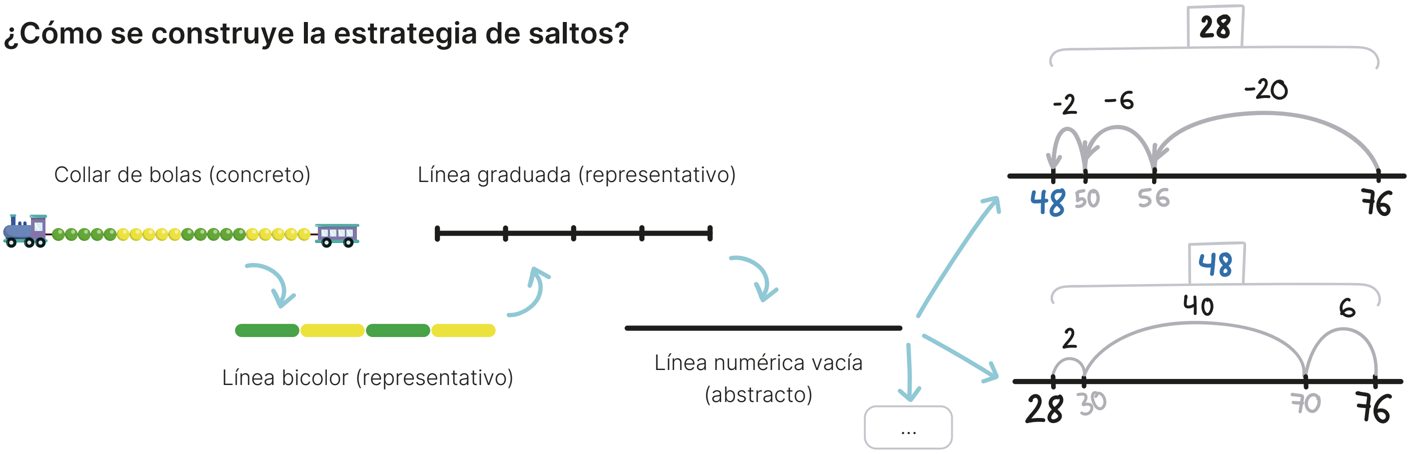
- **Saltos sobre la línea numérica**, con la que se puede ver la resta como quitar elementos (dar saltos hacia atrás) o encontrar la distancia entre dos números.

- **Estrategia de descomposición**, con la que se puede ver la resta como sacar o separar elementos de una cantidad inicial.

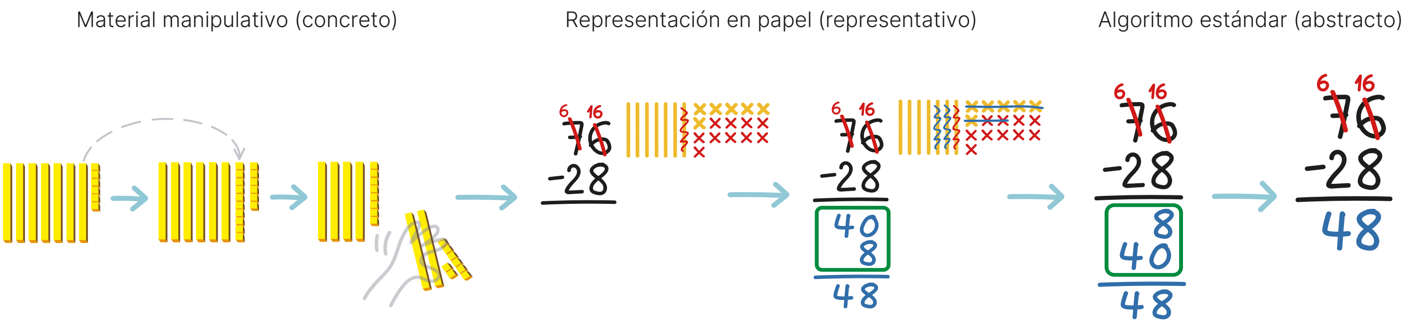


Así pues, la resta es compleja en dos sentidos. Por un lado, puede verse con dos significados; y, por otro, puede resolverse a través de dos estrategias principales.

¿Cómo se construye la estrategia de saltos?



¿Cómo se construye la estrategia de descomposición?



Qué nos permite la estrategia de saltos:

- Potenciar el cálculo mental de restas.
- Resolver restas de forma muy eficiente.
- Dejar atrás el conteo con los dedos.

Qué nos permite la estrategia de descomposición:

- Potenciar el cálculo escrito de restas.
- Comprender la posición y el valor de los números.
- Llegar al algoritmo estándar de la resta de forma transparente.

Cronología de aprendizaje de la resta de un alumno

Pese a que puede haber variaciones de un alumno a otro, a lo largo de 1º de primaria se trabaja la estrategia de saltos con el objetivo de llegar a la línea numérica vacía a final de curso. La estrategia de descomposición se trabaja en 2º de primaria, con el objetivo de empezar a dominar el algoritmo estándar de la resta a final de curso. A medida que se amplía el rango numérico (como de 0 a 10 o de 20 a 50), se recupera el material manipulativo con el objetivo de realizar otro ciclo de abstracción e ir abandonándolo progresivamente.

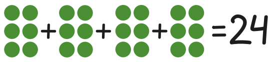
La
multiplicación

$15 \times 12 =$

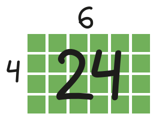
COMPRENDER CONCEPTUALMENTE QUÉ ES LA MULTIPLICACIÓN

(4 × 6)

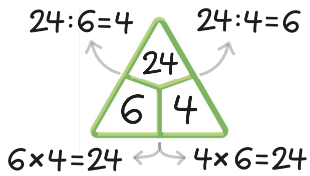
Modelo de grupos

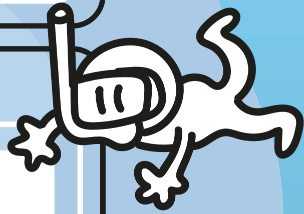


Modelo rectangular



Relación: multiplicación -división





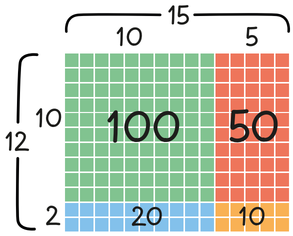
SABER HACER LA OPERACIÓN FLUIDAMENTE

CÁLCULO EXACTO

Automatización de multiplicaciones de un solo dígito (tablas de multiplicar)

1×1	1×2	1×3	1×4	...
2×1	2×2	2×3	2×4	...
3×1	3×2	3×3	3×4	...
4×1	4×2	4×3	4×4	...
...	...	...	...	...

Estrategia de descomposición (modelo rectangular)



$$\begin{array}{r} 100 \\ 50 \\ 20 \\ +\ 10 \\ \hline 180 \end{array}$$

Equivalencias

(Hechos conocidos - hechos derivados)

$15 \times 12 = ?$ ×2 :2 $30 \times 6 = 180 \rightarrow 15 \times 12 = 180$

...

CÁLCULO ESTIMATIVO

Estimaciones

$15 \times 12 \simeq 15 \times 10$

$15 \times 12 \simeq 150$

$15 \times 10 < 15 \times 12 < 20 \times 12$

$150 < 15 \times 12 < 240$

¿Qué es la multiplicación?

La multiplicación es la operación básica que consiste en sumar repetidamente una misma cantidad de elementos (suma iterada).

Este significado tan extendido solo define una parte de la esencia de la multiplicación, ya que multiplicar es también calcular la **cantidad de elementos dispuestos en las filas y columnas de un rectángulo**.

¿Cómo resolvemos la multiplicación?

Para resolver multiplicaciones existen diferentes estrategias y automatizaciones que garantizan el dominio y flexibilidad en los niños y niñas.

Automatización de multiplicaciones de un dígito

Consiste en **evocar con rapidez** los resultados de las multiplicaciones de un dígito (**tablas de multiplicar**). Esto nos permite centrarnos en conceptos más avanzados o complejos, liberándonos del esfuerzo de realizar cálculos básicos.

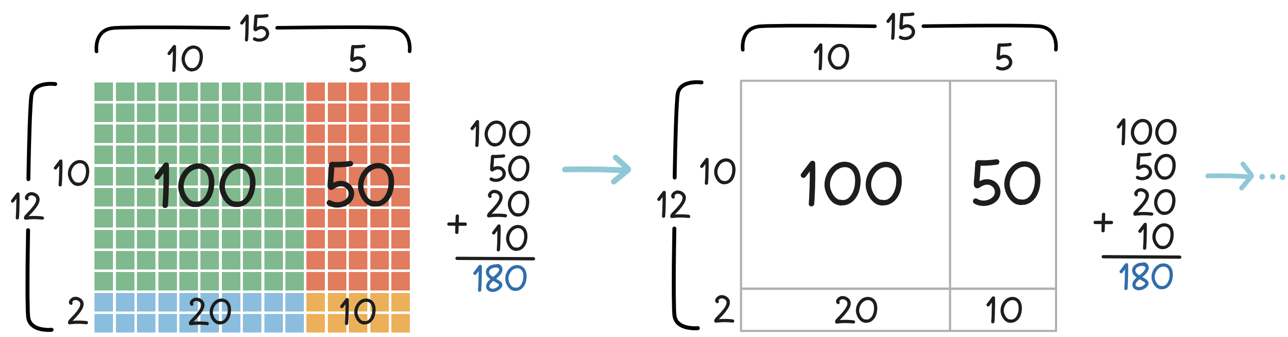
1×1	1×2	1×3	1×4	…
2×1	2×2	2×3	2×4	…
3×1	3×2	3×3	3×4	…
4×1	4×2	4×3	4×4	…
…	…	…	…	…

La estrategia del modelo rectangular

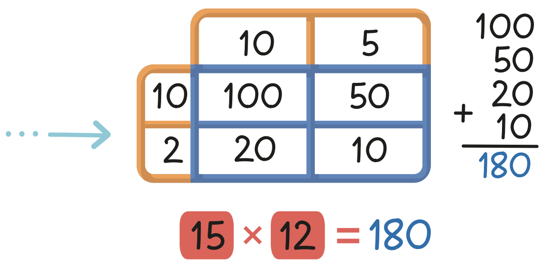
En el aula construimos **el modelo rectangular**, **una estrategia basada en la descomposición de los números** que permite ver la multiplicación como la cantidad de elementos dispuestos en un rectángulo. Y, además, es una estrategia que nos ayuda a llegar al **algoritmo estándar de la multiplicación** de forma transparente.

¿Cómo se construye el modelo rectangular?

Modelo rectangular (concreto)

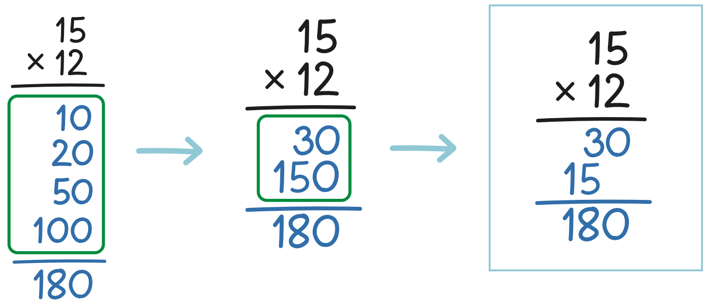


Esquema multiplicativo (representativo)



Algoritmo estándar (abstracto)

Algoritmo estándar compacto



Cronología de aprendizaje de la multiplicación de un alumno

Pese a que puede haber variaciones de un alumno a otro, a lo largo de 3º de primaria se construyen las tablas de multiplicar hasta llegar a su automatización a final de curso. El modelo rectangular se trabaja en 4º de primaria, con el objetivo de empezar a dominar el algoritmo estándar de la multiplicación a final de curso. A medida que se aumenta la complejidad de las operaciones (como multiplicar por dos cifras), se recuperan las representaciones concretas para realizar otro ciclo de abstracción e ir abandonándolas progresivamente.

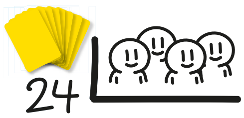
La
división

$$158 : 3 =$$

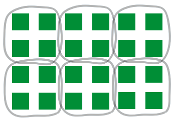
COMPRENDER CONCEPTUALMENTE QUÉ ES LA DIVISIÓN

(24 : 4)

Repartir entre...



Hacer grupos de...



Relación: multiplicación -división

24 : 6 = 4   24 : 4 = 6

24 / 6 | 4

6 × 4 = 24 ⟷ 4 × 6 = 24

SABER HACER LA OPERACIÓN FLUIDAMENTE

CÁLCULO EXACTO

Estrategia por reparto

158	3	
− 30	10	(10×3=30)
128		
− 60	20	(20×3=60)
68		
− 60	20	(20×3=60)
8		
− 6	2	(2×3=6)
2		

158 : 3 = 52 R2

Estrategia de descomposición

158 = 120 + 30 + 8

120 : 3 = 40
30 : 3 = 10
8 : 3 = 2 R2

158 : 3 = 40 + 10 + 2 R2
158 : 3 = 52 R2

Búsqueda de equivalencias
(Hechos conocidos - hechos derivados)

158 : 3 = ? → 150 : 3 = 50

$\downarrow{+3}$ $\downarrow{+1}$

153 : 3 = 51

$\downarrow{+3}$ $\downarrow{+1}$

156 : 3 = 52

$\downarrow{+3}$ $\downarrow{+1}$

159 : 3 = 53

158 : 3 = 52 R2

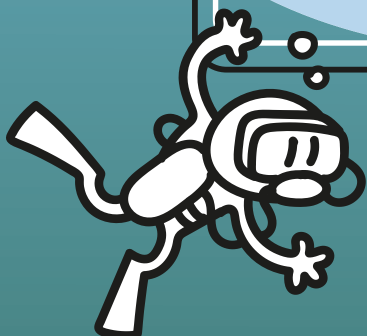
...

CÁLCULO ESTIMATIVO

Estimaciones

158 : 3 ≃ 150 : 3
158 : 3 ≃ 50

150 : 3 < 158 : 3 < 180 : 3
50 < 158 : 3 < 60



¿Qué es la división?

Repartir o hacer grupos, esta es la cuestión. La división es la cuarta operación básica que construimos en primaria. Con el objetivo de llegar a su significado, los docentes proponemos diferentes contextos y situaciones en las que se muestra **qué significa dividir**.

El sentido más extendido de la división es el de **repartir de forma equitativa**; pero dividir también es **hacer paquetes iguales**. Por ejemplo, cuántos paquetes de 4 bolas se pueden hacer con 24 bolas.

¿Cómo resolvemos la división?

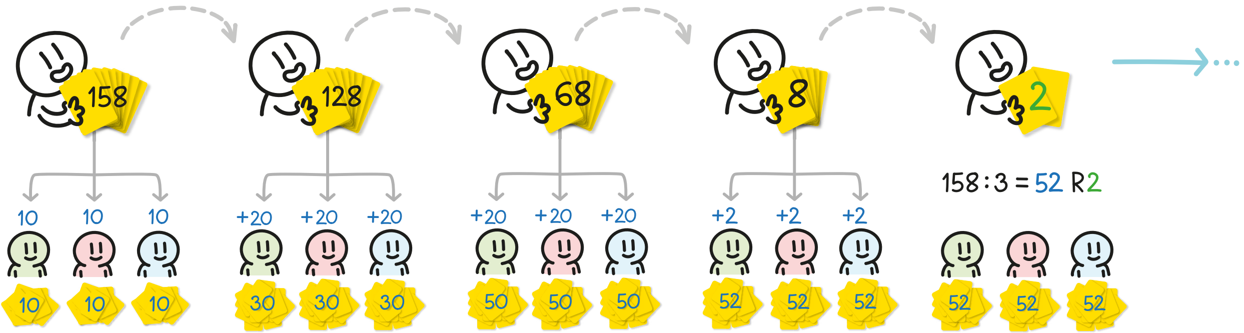
Existen varias formas de resolver una división. Por eso, se construyen **diferentes estrategias** que permiten desarrollar **criterio y flexibilidad** en los cálculos. Dos de las estrategias que se trabajan son:

- **Estrategia de repartos**, que nos permite ver la división como el hecho de repartir elementos. Tiene una secuencia de aprendizaje muy definida basada en el **modelo CRA**, que parte de los repartos de materiales y llega hasta el algoritmo estándar.

- **Estrategia de descomposición**, que nos es muy útil para resolver divisiones **mentalmente**. No tiene una secuencia de aprendizaje tan estructurada, pero sienta las bases para trabajar **equivalencias**.

¿Cómo se construye la estrategia de repartos?

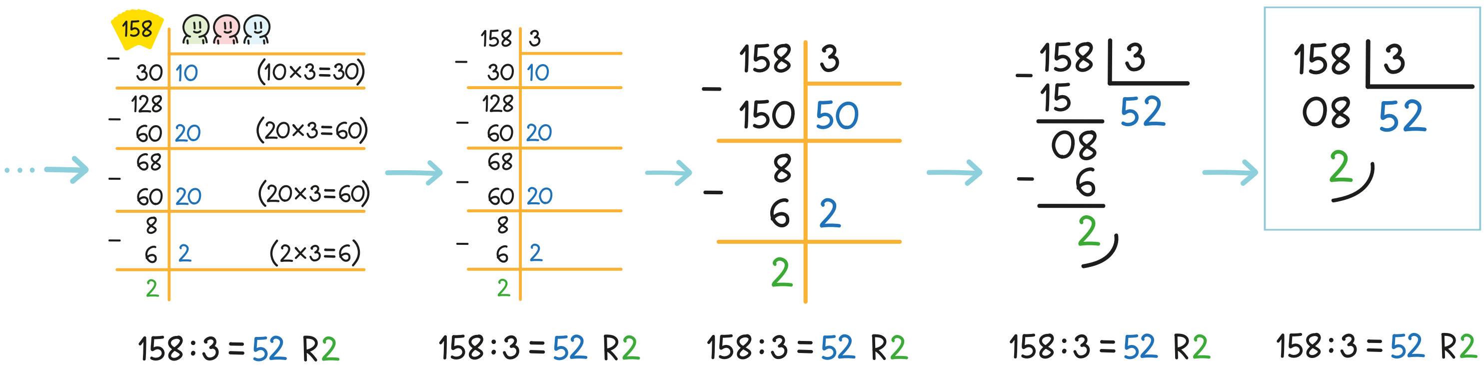
Repartir elementos (concreto)



Esquema vertical de la división (representativo)

Algoritmo estándar (abstracto)

Algoritmo estándar compacto



Cronología de aprendizaje de la división de un alumno en segundo ciclo

Pese a que puede haber variaciones de un alumno a otro, a lo largo de 4º de primaria se construyen y consolidan las dos estrategias de la división, hasta empezar a dominar el algoritmo estándar a final de curso. Cuando las operaciones se vuelven más complejas (como dividir por dos cifras), se recuperan las representaciones concretas para realizar otro ciclo de abstracción e ir abandonándolas progresivamente.

Cronología de aprendizaje de las estrategias de un alumno a lo largo de los cursos

	SUMA	RESTA	MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
1º	Comprensión de las primeras sumas con la estrategia de saltos, desde el collar de bolas hasta la línea numérica vacía en el rango 0-100. Inicio de automatización de sumas de un solo dígito. Uso de la relación suma-resta con las cajitas aditivas.	Comprensión de las primeras restas con la estrategia de saltos, desde el collar de bolas hasta la línea numérica vacía en el rango 0-100. Inicio de automatización de restas de un solo dígito. Uso de la relación suma-resta con las cajitas aditivas.		
2º	Comprensión de los saltos sobre la línea numérica con soltura. Comprensión de la estrategia de descomposición hasta el algoritmo estándar de la suma en el rango 0-100. Automatización de sumas de un solo dígito.	Comprensión de los saltos sobre la línea numérica con soltura. Comprensión de la estrategia de descomposición hasta el algoritmo estándar de la resta en el rango 0-100. Automatización de restas de un solo dígito.	Primeras nociones del pensamiento multiplicativo: dobles y mitades.	
3º	Comprensión de sumas con ambas estrategias en el rango 0-10 000. Fluidez con las estrategias con números de hasta dos cifras.	Comprensión de restas con ambas estrategias en el rango 0-10 000. Fluidez con las estrategias con números de hasta dos cifras.	Inicio de automatización de las tablas de multiplicar. Comprensión del modelo rectangular hasta el esquema multiplicativo.	Uso de la relación multiplicación-división con las cajitas multiplicativas.
4º	Fluidez con sumas de hasta 4 dígitos.	Fluidez con restas de hasta 4 dígitos.	Comprensión del algoritmo estándar de la multiplicación.	Comprensión de la estrategia de repartos hasta la optimización de repartos, como hacíamos con el algoritmo estándar, y de la estrategia de descomposición de la división.
5º 6º	Comprensión y fluidez de sumas de números naturales con la estrategia de saltos y la estrategia de descomposición. Comprensión de sumas con números decimales.	Comprensión y fluidez de restas de números naturales con la estrategia de saltos y la estrategia de descomposición. Comprensión de restas con números decimales.	Consolidación del algoritmo estándar de la multiplicación en rangos mayores. Fluidez multiplicativa con números naturales. Comprensión de la multiplicación con números decimales.	Consolidación de repartos con la mínima cantidad de repartos, como hacíamos con el algoritmo estándar. Fluidez multiplicativa con números naturales. Comprensión de la división con números decimales.