

# L'algoritme de la divisió

---

En aquesta càpsula tractarem el procés de construcció de l'algoritme de la divisió. Entenem que l'algoritme ha d'aparèixer a l'aula, després d'haver treballat a bastament els repartiments amb material manipulatiu, com un registre natural i més o menys lliure d'aquests processos de repartiment.

## Introducció

Per realitzar una operació aritmètica disposem de diferents algoritmes, com ja vam analitzar en el cas d'operacions additives. De fet, els que avui són, per la majoria, els "algoritmes estàndard", no ho han estat des de sempre, ni són els mateixos arreu del món.

Un cop hem assumit l'existència de diversos algoritmes associats a una mateixa operació, cal preguntar-se amb quin criteri triem els que farem servir a l'aula en cadascuna de les quatre operacions aritmètiques bàsiques. Des del "Laboratori dels Nombres", defensem que els criteris més rellevants que haurien de formar part d'aquesta decisió són, en primer lloc, la transparència de la justificació de l'algoritme i, en segon lloc, el potencial que té amb relació a futurs aprenentatges, sense desmerèixer l'eficiència del procediment.

Dins el marc de construcció de l'aprenentatge, no només s'acudeix a la contextualització en el moment de presentar un concepte, sinó també en el moment d'introduir un algoritme. Per regla general, en el passat, les lliçons sobre com convertir en algoritme les operacions aritmètiques començaven directament amb l'explicació de cadascun dels passos de l'algoritme. És a dir, es prescindia del context i no es tenia gens en compte la transparència o la resposta a la pregunta de per què aquest seguit de passos condueixen al resultat correcte. A partir d'aquí, la lliçó continuava amb repeticions interminables del procediment fins que la majoria d'infants, a força d'una pràctica reproductiva, es familiaritzaven amb els passos de l'algoritme i els aprenien de memòria, en molts casos, sense entendre per què funcionen. Des de fa uns quants anys, però, la recerca en didàctica ens ha permès començar a plantejar la introducció dels algoritmes seguint un itinerari diferent.

---

# La divisió


Abans d'entrar en matèria, val la pena destacar que, per nosaltres, un infant "sap dividir" quan sap resoldre els problemes o situacions escolars que impliquen una divisió, independentment de si domina o no l'algoritme associat a aquesta operació. Imaginem el cas d'un infant que, per dividir 100 entre 4, com que no domina l'algoritme, evoca el triangle multiplicador format pel 100, el 25 i el 4; o es fa un dibuix per repartir; o agafa 100 cubets i en fa 4 grups iguals. Convindrem que aquest infant, malgrat que encara no domina l'algoritme, sí que sap dividir. És molt important, doncs, fer aquesta dissociació entre "saber dividir" i "saber aplicar un algoritme de la divisió".

Un algoritme, per tant, ha de presentar-se com *una* de les possibles maneres de sistematitzar el procediment. I l'algoritme tradicional estàndard és, llavors, aquell que la societat d'un indret ha considerat més eficient fins al moment i, evidentment, no és el mateix arreu del món. Sovint, les diferències entre els algoritmes estàndard de cada indret són simplement d'aparença. Per exemple, en alguns països europeus, en realitzar una divisió escriuen el divisor a l'esquerra del dividend mentre que, en d'altres, sempre expliciten les restes parcials. A la imatge següent veiem tres maneres diferents de registrar un procediment que, en essència, és el mateix:

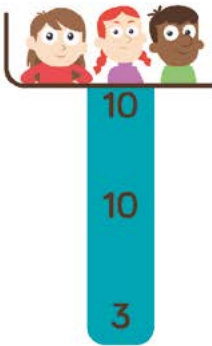
$$\begin{array}{r}
 127 \overline{) 3} \\
 \underline{07} \quad 42 \\
 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 127 \overline{) 3} \\
 \underline{-12} \quad 42 \\
 \underline{-12} \\
 \underline{-6} \\
 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 3 \overline{) 42} \\
 \underline{-12} \\
 07 \\
 \underline{-6} \\
 1
 \end{array}$$

Podem trobar diferències més profundes en l'algoritme de la divisió si analitzem algoritmes que s'han fet servir en el passat com ara la divisió egípcia o la divisió a la francesa. Si us interessa especialment aquest tema, podeu trobar exemples d'aquests algoritmes a Ibrah, G. (1998).

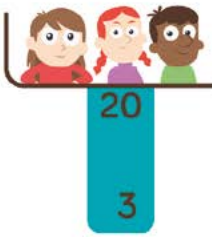
La construcció del càlcul en columnes proposada per l'Institut Freudenthal (Heuvel-Panhuizen, 2001) apareix com un simple registre ordenat dels càlculs mentals que requereix un repartiment quan fem servir material manipulatiu (cubets encaixables, fitxes, cigrons, etc.). Per exemple, proposem a un infant que reparteixi 70 objectes entre 3 persones i anem enregistrant a la pissarra la seva transcripció simbòlica:

$  \begin{array}{r}  70 \\  -30 \\  \hline  40 \\  -30 \\  \hline  10 \\  -9 \\  \hline  1  \end{array}  $		<p>← Donem 10 objectes a cada persona. Fins ara n'hem repartit 30 i ens en queden 40 per repartir.</p> <p>← Donem uns altres 10 objectes a cada persona. N'hem repartit 30 més i ens en queden 10 per repartir.</p> <p>← Donem uns altres 3 objectes a cada persona. N'hem repartit 9 i en sobra 1 que ja no podem repartir.</p>
	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="background-color: red; color: white; padding: 5px; text-align: center;">10</div> <div style="background-color: purple; color: white; padding: 5px; text-align: center;">10</div> <div style="background-color: green; color: white; padding: 5px; text-align: center;">10</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="background-color: red; color: white; padding: 5px; text-align: center;">10</div> <div style="background-color: purple; color: white; padding: 5px; text-align: center;">10</div> <div style="background-color: green; color: white; padding: 5px; text-align: center;">10</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="background-color: red; color: white; padding: 5px; text-align: center;">3</div> <div style="background-color: purple; color: white; padding: 5px; text-align: center;">3</div> <div style="background-color: green; color: white; padding: 5px; text-align: center;">3</div> </div>	

Evidentment, aquest primer registre del repartiment és poc eficient, així que convé dotar-nos d'una expressió més breu. Això ens porta a abreviar el procés tot realitzant successives compressions. La primera que se'ns pot acudir és que no importa *qui* són les persones, sinó *quantes* són. Per tant, no cal triplicar el registre i escriure'l sota cada persona:

$$\begin{array}{r}
 70 \\
 - 30 \\
 \hline
 40 \\
 - 30 \\
 \hline
 10 \\
 - 9 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$


La següent iteració del procediment demana reflexionar sobre la quantitat de vegades que hem hagut de repartir. En l'exemple, ho hem fet tres vegades (hem repartit 10, 10 i 3 a cadascú cada vegada), però podríem haver-ho fet en dues:

$$\begin{array}{r}
 70 \\
 - 60 \\
 \hline
 10 \\
 - 9 \\
 \hline
 1
 \end{array}$$


Si, en el moment de resoldre un problema, dos dels nostres infants ens presenten, respectivament, els dos registres anteriors, podem afirmar que tots dos "saben dividir". La diferència rau en el fet que un infant fa un registre més eficient que l'altre, i hem de convidar a l'eficiència sempre que ho considerem oportú, tot tenint en compte l'atenció a la diversitat. Persegüim l'objectiu que tot l'alumnat sigui capaç de resoldre situacions de repartiment o agrupament que impliquin el càlcul del quocient i el residu d'una divisió dins d'un rang numèric raonable. Ara bé, quan aquests càlculs requereixin un registre escrit, hem de tenir en compte que no tots els infants tenen per què seguir el mateix algoritme ni tampoc l'algoritme més eficient que coneixen, sobretot si la recerca de l'eficiència ens ha de fer sacrificar transparència i comprensió del procediment.

# Característiques d'aquest esquema per enregistrar la divisió

Durant l'execució de l'algoritme estàndard tradicional per a la divisió, són habituals algunes frases difícils de justificar matemàticament a l'alumnat: per exemple, quan diem "baixo el 7" en dividir 127 entre 3. El primer que crida l'atenció de l'esquema que acabem de presentar per enregistrar la divisió, doncs, és precisament que té en compte les quantitats en comptes dels dígit. Aquest simple fet li confereix, ja d'entrada, una major transparència que la que té l'algoritme estàndard.

Una segona gran diferència amb l'algoritme tradicional és que aquest esquema procedimental no exigeix cap ajustament quan passem a tenir divisors de dues xifres.

$$\begin{array}{r}
 4368 \overline{) 24} \\
 \underline{2400} \quad 100 \\
 1968 \\
 \underline{-1200} \quad 50 \\
 768 \\
 \underline{-720} \quad 30 \\
 48 \\
 \underline{-48} \quad 2 \\
 0 \quad 182
 \end{array}$$

A continuació podem veure l'esquema d'una divisió amb anotacions de suport. Aquestes anotacions recullen alguns múltiples del divisor i poden ajudar l'infant a l'hora de triar i comptar el repartiment. Els múltiples triats en aquest cas sorgeixen de fer dobles, meitats o de multiplicar per 10.

$$420 : 12 = 35$$

$$\begin{array}{r}
 420 \overline{) 12} \\
 \underline{-240} \quad 20 \\
 180 \\
 \underline{-120} \quad 10 \\
 60 \\
 \underline{-60} \quad 2 \\
 0 \quad 35
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 12 \\
 \times 1 \quad 12 \\
 \times 2 \quad 24 \\
 \times 4 \quad 48 \\
 \times 8 \quad 96 \\
 \times 10 \quad 120 \\
 \times 5 \quad 60
 \end{array}$$

Una tercera característica d'aquest esquema és que permet la fàcil extensió cap als decimals, si no ens conformem amb el residu enter. Vegem com a exemple la resolució de la següent situació: cal repartir 35 € en 8 bosses, de manera que hi hagi en totes la mateixa quantitat de diners.

35 €



Sobren 4 cèntims, però no continuem perquè no hi ha monedes de menys d'1 cèntim

$$\begin{array}{r}
 35 \overline{) 8} \\
 \underline{-32} \quad 4 \\
 3 \\
 \underline{-0,80} \quad 0,10 \\
 2,20 \\
 \underline{-1,60} \quad 0,20 \\
 0,60 \\
 \underline{-0,40} \quad 0,05 \\
 0,20 \\
 \underline{-0,16} \quad 0,02 \\
 0,04 \quad 4,37
 \end{array}$$

Queden menys de 8 €, així que ara repartim cèntims

$$35 : 8 = 4,37$$

Evidentment, és molt més ràpid explicar que la manera de continuar la divisió (perquè encara podem repartir els 3 euros del residu entre les 8 persones si fem servir els cèntims) és “posar la coma i baixar zeros”. En aquest moment de la càpsula, però, gairebé no cal dir que aquesta recepta destaca per una escandalosa falta de transparència. I hem de tenir ben present, com a mestres, que la principal responsable de la concepció que tenen alguns adults sobre les matemàtiques, com una disciplina que requereix molta memorització i aplicar regles misterioses, és precisament la falta de transparència. Així doncs, val la pena sacrificar velocitat per guanyar transparència i comprensió.

## La pràctica d'aquest esquema

De manera anàloga al que passa amb altres algorismes, la pràctica de l'esquema que proposem per la divisió és imprescindible per aconseguir que els infants, més enllà de comprendre'l, el puguin executar amb soltesa. En qualsevol cas, aquesta pràctica ha de ser productiva per ser coherent tant amb el tractament de la diversitat que fem a l'aula, on no tots els infants triguem el mateix a dominar un procediment, com amb la idea irrenunciable que l'ambient habitual a classe ha de ser la resolució de problemes.

A continuació exposem un parell d'exemples de tasques on pretenem practicar aquest esquema i anar més enllà en els raonaments.

- En qualsevol divisió en què el dividend acaba en 82 (o en qualsevol altra parella de xifres) i el divisor és 4, el residu sempre és el mateix:

b) Tria 2 nombres de 3 xifres acabats en 82 i divideix-los entre 4.

$$\square \square 82 \div 4$$

$$\square \square 82 \div 4$$



Què tenen en comú les 2 divisions que has fet tu i les que han fet els teus companys i companyes?

- En dues divisions en què el divisor és 3 i els dividends són nombres formats per les mateixes xifres desordenades, el residu és el mateix:

1. Escribe tots els nombres de 3 xifres possibles amb les xifres següents.



- Divideix els nombres anteriors entre 3.

Val la pena observar que, en aquest exemple, també treballem un altre ingredient bàsic de la resolució de problemes: el pensament sistemàtic involucrat en la demanda dels sis dividends diferents que es poden formar a partir de les tres targetes.

# Per acabar

---

Sarramona i Pintó van publicar l'any 2000 un important estudi a la revista *EDUCAR*, anomenat "Identificació de les competències bàsiques en l'ensenyament obligatori". L'estudi tenia per objectiu identificar i definir les competències bàsiques que l'alumnat hauria de dominar en acabar l'escolarització obligatòria, i basa part de les seves conclusions en les consultes fetes a col·lectius representatius tant de l'àmbit escolar com sociolaboral. Amb relació a les Matemàtiques, després d'una anàlisi crítica dels resultats de l'estudi, el Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya va decidir no incloure l'execució d'algoritmes en les proves de competències que s'apliquen des d'aleshores a Primària. Aquest gest institucional va obrir el camí a Catalunya pels qui defensem que cal desplaçar els algoritmes del centre de l'activitat matemàtica escolar.

Malgrat això, com a mestres hem de tenir sempre ben present que, deixar de banda els algoritmes tradicionals com a organitzadors del currículum en favor de l'aritmètica mental i la riquesa dels procediments transparents, pot provocar rebuig entre les famílies i, fins i tot, en algunes mestres. Això és degut a l'opinió que en general té la societat sobre el protagonisme dels algoritmes aritmètics a l'escola, fonamentada més en la tradició que no pas en evidències didàctiques com les de l'estudi esmentat.

En conclusió, l'escenari ideal per avançar en el desplaçament dels algoritmes del lloc central que fins ara ocupaven és una classe on les explicacions es converteixen en reptes, on el mestre o la mestra passa d'explicar "això es resol així" a preguntar "i tu, com ho resoldries?". Per assumir el risc que això representa, però, és evident que la/el mestre necessita comptar amb el suport i la confiança dels pares i mares i de l'entorn escolar.

---

# Referències bibliogràfiques

---

Ifrah, G. (1998). *Historia universal de las cifras: la inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo* (pp. 437, 1311). Madrid: Espasa, D. L.

Sarramona, J. i Pintó, C. (2000). *Identificació de les Competències bàsiques en l'ensenyament obligatori*. Barcelona: Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.). (1999). *Children learn mathematics*. Rotterdam: The Netherlands: Sense Publishers.

---

© 2019 per Innovamat Education, SL.  
Avinguda de la Generalitat, 216  
08174 Sant Cugat del Vallès, Barcelona

Reservats tots els drets a favor de l'editor de l'obra. El contingut i les imatges d'aquesta publicació no podran ser reproduïts totalment o parcial, transmesos, tractats (informàticament o amb qualsevol altre sistema), llogats, cedits o explotats sense permís previ i per escrit d'Innovamat Education, SL.